

## ĐỒ THỊ LŨY LINH TRÊN VÀNH $\mathbb{Z}_n$

**Lê Văn An** <sup>(1)</sup>, **Nguyễn Thị Hải Anh** <sup>(1)</sup>,  
**Nguyễn Thị Thanh Huyền** <sup>(2)</sup> và **Latthvone Douangsanga** <sup>(3)</sup>

<sup>1</sup> Khoa Sư phạm - Trường Đại học Hà Tĩnh

<sup>2</sup> Lớp cao học khóa 26, Đại số và Lý thuyết số - Trường Đại học Vinh

<sup>3</sup> Sinh viên K8 Sư phạm Toán - Trường Đại học Hà Tĩnh

Ngày nhận bài 18/8/2019, ngày nhận đăng 22/10/2019

**Tóm tắt:** Trong [4], Basnet-Sharma-Dutta đã giới thiệu và nghiên cứu khái niệm đồ thị lũy linh của một vành giao hoán hữu hạn. Trong bài báo này, chúng tôi tính được số thành phần liên thông của đồ thị lũy linh cho vành  $\mathbb{Z}_n$ . Áp dụng kết quả này, chúng tôi đặc trưng được tính liên thông và tính đầy đủ của đồ thị lũy linh cho vành  $\mathbb{Z}_n$ .

**Từ khóa:** Phần tử lũy linh; đồ thị; đồ thị lũy linh; đồ thị đầy đủ; đồ thị liên thông; thành phần liên thông.

### 1 Đặt vấn đề

Trong toàn bộ bài báo này, chúng tôi quan tâm xem xét các vành  $R$  hữu hạn, kết hợp và có đơn vị khác không. Ký hiệu  $\mathbb{Z}_n$  để chỉ vành các lớp thặng dư môđulô  $n$ . Cho tập hợp hữu hạn  $X$ , ký hiệu  $card(X)$  là số phần tử của tập hợp  $X$ . Cho hai số tự nhiên  $k, n$ , ký hiệu  $\binom{n}{k}$  là số tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử với lưu ý nếu  $n < k$  thì  $\binom{n}{k} = 0$ . Cho hai số nguyên dương  $a, b$ , ký hiệu ước chung lớn nhất của chúng là  $gcd(a, b)$ .

Lý thuyết đồ thị là đối tượng nghiên cứu quan trọng của Hình học tổ hợp và có nhiều ứng dụng trong thực tế. Hiện nay, Lý thuyết đồ thị còn tác động vào nhiều chuyên ngành khác nhau của Toán học. Một trong những lĩnh vực Toán học mà Lý thuyết đồ thị có nhiều tác động hiện nay là Đại số. Nghiên cứu các cấu trúc đại số thông qua Lý thuyết đồ thị và ngược lại là một trong những vấn đề thời sự đang được nhiều tác giả quan tâm (xem [1], [2], [9]).

Trong [4], các tác giả đã sử dụng khái niệm đồ thị để biểu diễn các phần tử lũy linh của một vành giao hoán hữu hạn có đơn vị  $1 \neq 0$ . Trong bài báo đó, tập hợp các đỉnh của đồ thị chính là tập hợp các phần tử không lũy linh của vành, một cạnh nối hai đỉnh phân biệt  $x, y$  chỉ nếu  $x + y$  là một phần tử lũy linh của vành  $R$ . Đồ thị  $G$  vì vậy sẽ không có khuyên và nếu hai phần tử không lũy linh phân biệt bất kỳ có tổng là một phần tử lũy linh sẽ dẫn đến đồ thị  $G$  là đầy đủ. Một câu hỏi được đặt ra là:

**Câu hỏi 1:** "Vành giao hoán  $R$  có đặc trưng gì để đồ thị  $G$  đầy đủ và ngược lại?"

Một số câu hỏi thú vị khác cũng được đặt ra là:

**Câu hỏi 2:** Vành  $R$  có đặc trưng gì để đồ thị  $G$  liên thông?

**Câu hỏi 3:** Tính số thành phần liên thông của đồ thị lũy linh?

<sup>1)</sup> Email: an.levan@htu.edu.vn (L. V. An)

Việc giải quyết các câu hỏi trên cho lớp vành giao hoán hữu hạn có đơn vị  $1 \neq 0$  sẽ là vấn đề thú vị nhưng không đơn giản. Trong bài báo này, chúng tôi chỉ xem xét các câu hỏi trên cho một trường hợp đặc biệt. Cụ thể chúng tôi chỉ nghiên cứu một số khía cạnh của đồ thị lũy linh cho vành các lớp thặng dư môđulô  $n$ .

Định lý 11 của bài báo sẽ trả lời Câu hỏi 1, cho vành các lớp thặng dư môđulô  $n$ . Chúng ta biết rằng trên vành giao hoán tổng hai phần tử lũy linh phân biệt  $x, y$  có bậc lũy linh lần lượt là  $m$  và  $n$  sẽ là phần tử lũy linh vì

$$(x + y)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k y^{m+n-k} = 0,$$

(do  $x^k = 0$  với  $k \geq m$  và  $y^{m+n-k} = 0$  với  $k < m$ ). Tuy nhiên tổng hai phần tử không lũy linh phân biệt có thể không là phần tử lũy linh. Vì thế, Định lý 11 cũng sẽ trả lời một phần câu hỏi: "*Khi nào tổng hai phần tử không lũy linh phân biệt là phần tử lũy linh?*".

Định lý 8 và Định lý 10 của bài báo sẽ trả lời Câu hỏi 2 và Câu hỏi 3 cho lớp vành các lớp thặng dư môđulô  $n$ .

Kỹ thuật cơ bản để giải quyết các vấn đề đặt ra trong bài báo của chúng tôi là các tính toán tổ hợp trên tập hợp hữu hạn cũng như các ý tưởng số học về các số nguyên tố. Một kết quả chúng tôi thường xuyên sử dụng là Định lý cơ bản của số học nói rằng một số tự nhiên lớn hơn 1 có thể biểu diễn một cách duy nhất thành tích các thừa số nguyên tố cùng với số mũ của nó. Tức là, nếu  $n \geq 2$ , thì nó được biểu diễn duy nhất dưới dạng  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  trong đó  $p_1, p_2, \dots, p_k$  là các số nguyên tố đôi một phân biệt và  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  là các số nguyên dương (với  $k$  là số nguyên dương).

## 2 Các khái niệm cơ bản

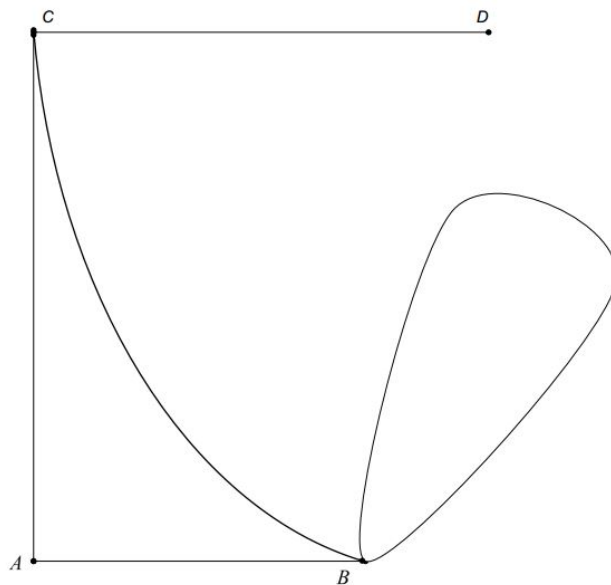
Cho vành  $R$ , phần tử  $x \in R$  được gọi là *lũy linh* (nilpotent) nếu tồn tại số nguyên dương  $k$  sao cho  $x^k = 0$ , số nguyên dương  $k$  nhỏ nhất có tính chất đó gọi là *bậc lũy linh của phần tử*  $x$ . Đối với một vành  $R$  bất kỳ, ký hiệu  $Nil(R)$  là tập tất cả các phần tử lũy linh của nó. Một kết quả quan trọng và đẹp trong Đại số tuyến tính khẳng định rằng nếu  $A$  là phần tử trong vành ma trận vuông cấp  $n$  trên trường  $K$  thì bậc lũy linh của  $A$  không vượt quá  $n$ . Các khái niệm và tính chất của phần tử lũy linh có thể tìm thấy trong các tài liệu [3], [10].

Các phần tử lũy linh trong vành là đối tượng nghiên cứu của Lý thuyết vành và đang được nhiều tác giả quan tâm. Giả thuyết Kothe liên quan đến các phần tử lũy linh và các ideal lũy linh được đề xuất từ năm 1930 đến nay vẫn chưa được giải quyết và đang nhận được sự quan tâm của nhiều nhà đại số trên thế giới (xem [5], [7], [8]).

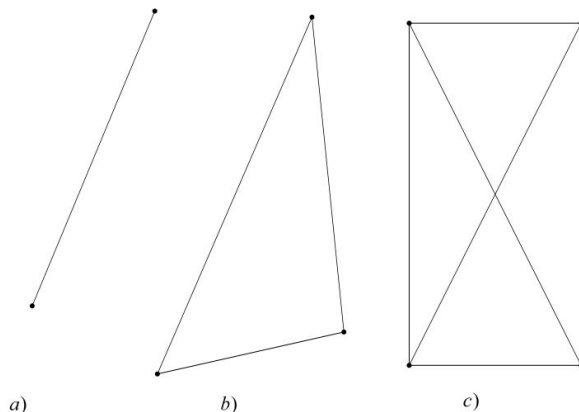
Một *đồ thị vô hướng* (graph) là một bộ gồm 2 thành phần  $G = G(V, E)$  trong đó  $V$  là tập các đỉnh và  $E$  là tập các cạnh, ở đây cạnh  $AB \in E$  nghĩa là cạnh nối điểm  $A$  với điểm  $B$  (hay điểm  $B$  nối với điểm  $A$ ). Trong trường hợp cạnh nối điểm  $A$  với chính nó được gọi là *khuyên* (loop). Một đồ thị  $G$  không có khuyên, trong đó hai đỉnh được nối với nhau nhiều nhất là một cạnh được gọi là *đồ thị đơn* (simple graph). Một đồ thị đơn  $G$  được gọi là *đầy đủ* (complete graph) nếu cặp đỉnh bất kỳ của  $G$  được nối với nhau bằng đúng 1 cạnh. Xét một đỉnh  $v \in V$  của đồ thị  $G = G(V, E)$  ta nói *bậc* của  $v$  bằng  $k$  và ký hiệu  $k = deg(v)$  nếu  $v$  là đầu mút của đúng  $k$  cạnh (tính cả khuyên).

Cho  $G = G(V, E)$  là một đồ thị, *đường đi* (path) từ đỉnh  $A \in V$  đến đỉnh  $B \in V$  trong đồ thị là dãy các đỉnh  $v_1 v_2 \dots v_k$  sao cho  $v_1 = A$ ,  $v_k = B$  và đỉnh  $v_i$  được nối với đỉnh  $v_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, k - 1$ ). *Đường đi đơn* (simple path) là đường đi mà các đỉnh của nó đôi một phân biệt trừ điểm đầu và điểm cuối không nhất thiết phân biệt. *Chu trình* (cycle) là đường đi khép kín tức là điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Chu trình và là đường đi đơn được gọi là *chu trình đơn* (simple cycle). Đồ thị  $G$  không có chu trình được gọi là *acyclic*. Lưu ý rằng một cạnh cũng là đường đi. Tương tự một khuyên cũng là một chu trình và được gọi là *chu trình tầm thường* (trivial cycle). Một chu trình không phải là khuyên được gọi là *chu trình không tầm thường* (nontrivial cycle).

Đồ thị  $G$  được gọi là *liên thông* (connected) nếu hai đỉnh bất kỳ  $x, y$  của  $G$  tồn tại đường đi trong  $G$  nối  $x$  với  $y$ . Cho  $G = G(V, E)$  là một đồ thị, đồ thị  $G' = G'(V', E')$  trong đó  $V' \subset V$  và  $E' \subset E$  được gọi là *đồ thị con* (subgraph) của đồ thị  $G$ . Đồ thị con liên thông tối đại của  $G$  (tức là đồ thị con đó là đồ thị liên thông và không thể nhận thêm bất kỳ một đỉnh nào mà vẫn duy trì tính chất liên thông) được gọi là một *thành phần liên thông* (connected component) của  $G$ . Nếu  $G$  là đồ thị liên thông thì nó có đúng một thành phần liên thông (chính là toàn bộ đồ thị). Nếu  $G$  là đồ thị không liên thông sẽ được chia nhỏ thành các đồ thị liên thông mà mỗi đồ thị con là một thành phần liên thông của  $G$ . Các khái niệm và tính chất của Lý thuyết đồ thị có thể tìm thấy trong các tài liệu [6], [9].



**Hình 1:** Đồ thị liên thông và có khuyên



**Hình 2:** Các ví dụ về đồ thị đầy đủ với số đỉnh lần lượt là 2, 3, 4.  
Nếu gộp ba đồ thị lại chúng ta có một đồ thị gồm 3 thành phần liên thông

### 3 Đồ thị lũy linh

Trong mục này chúng tôi giới thiệu định nghĩa của đồ thị lũy linh cho một vành kết hợp bất kỳ. Lưu ý rằng, khái niệm đồ thị lũy linh mà Basnet-Sharma-Dutta giới thiệu trong [4], chỉ xét  $R$  là một vành giao hoán hữu hạn. Trong bài báo này, chúng tôi xét vành  $R$  có tính chất kết hợp và có đơn vị  $1 \neq 0$  và vì thế tổng quát hơn trong [4]. Sau đó chúng tôi chỉ ra một số ví dụ về đồ thị lũy linh cho một số lớp vành cụ thể.

**Định nghĩa.** Cho  $R$  là một vành kết hợp có đơn vị. Đồ thị  $G = G(V, E)$  được gọi là *đồ thị lũy linh* (nilpotent graph) của vành  $R$  nếu tập các đỉnh  $V$  của  $G$  là tập tất cả các phần tử thuộc  $R \setminus Nil(R)$  và tập các cạnh  $E$  của  $G$  là tập tất cả các đường nối giữa hai phần tử  $x$  và  $y$  phân biệt thuộc  $V$  sao cho  $x + y \in Nil(R)$ .

Tiếp theo chúng tôi giới thiệu một số ví dụ cụ thể về đồ thị lũy linh cho một số lớp vành. Trong trường hợp vành  $R$  không giao hoán chúng tôi quan tâm đến lớp vành ma trận vuông cấp 2 (Ví dụ 1 và Ví dụ 2). Trong trường hợp vành  $R$  giao hoán chúng tôi quan tâm đến lớp vành các lớp thặng dư môđulo  $n$ .

**Ví dụ 1.** Xét vành  $R = M_2(\mathbb{Z}_2)$  là vành các ma trận vuông cấp 2 của vành  $\mathbb{Z}_2$ . Khi đó chúng ta có

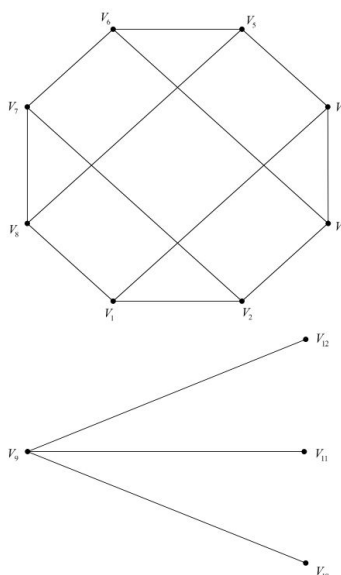
$$Nil(R) = Nil(M_2(\mathbb{Z}_2)) = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Vì thế tập đỉnh của đồ thị } G \text{ là: } V = \left\{ V_1 \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}; V_2 \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}; V_3 \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \right\};$$

$$V_4 \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}; V_5 \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}; V_6 \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}; V_7 \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}; V_8 \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix};$$

$$V_9 \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}; V_{10} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}; V_{11} \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}; V_{12} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \}.$$

Do đó đồ thị  $G$  là:



**Hình 3:** Đồ thị lũy linh của vành  $R = M_2(\mathbb{Z}_2)$ .

**Ví dụ 2.** Xét vành  $R = T_2(\mathbb{Z}_2)$  là vành các ma trận tam giác trên cấp 2 của vành  $\mathbb{Z}_2$ . Khi đó chúng ta có

$$Nil(R) = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \right\}.$$

Vì thế tập đỉnh của đồ thị  $G$  là:  $V = \{V_1 \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}; V_2 \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}; V_3 \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix};$

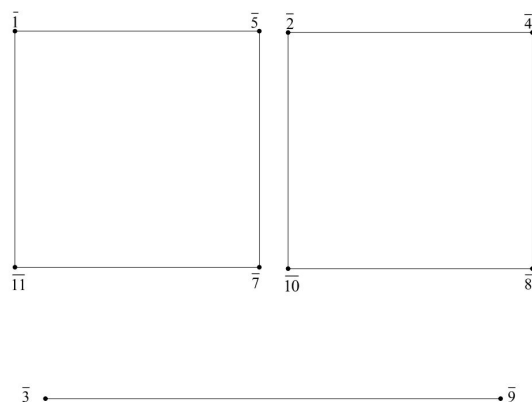
$$V_4 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}; V_5 \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}; V_6 \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \}.$$

Do đó đồ thị  $G$  là:



**Hình 4:** Đồ thị lũy linh của vành  $R = T_2(\mathbb{Z}_2)$ .

**Ví dụ 3.** Xét vành  $R = \mathbb{Z}_{12}$ , suy ra  $Nil(R) = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ . Do đó chúng ta có  $V = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}\}$ . Đồ thị  $G$  là:



**Hình 5:** Đồ thị lũy linh của vành  $R = \mathbb{Z}_{12}$ .

Vấn đề chủ yếu mà bài báo này quan tâm là tính số thành phần liên thông của đồ thị lũy linh cho vành các lớp thặng dư môđulô  $n$ . Từ đó chỉ ra điều kiện cần và đủ của số nguyên dương  $n$  để đồ thị lũy linh của vành  $\mathbb{Z}_n$  là đồ thị liên thông và đồ thị đầy đủ. Các kết quả về những vấn đề này là nội dung của phần tiếp theo sau đây.

#### 4 Tính liên thông và đầy đủ của đồ thị lũy linh cho vành $\mathbb{Z}_n$

Trong mục này chúng tôi xét đồ thị lũy linh của vành các lớp thặng dư môđulô  $n$ . Để bắt đầu cho các kết quả của mục này, chúng tôi đưa ra một số nhận xét sau đây:

**Nhận xét 1.** Nếu  $G = G(V, E)$  là đồ thị đầy đủ và  $card(V) = n$  thì  $card(E) = \binom{n}{2}$ .

**Nhận xét 2.** Nếu  $G = G(V, E)$  là đồ thị đơn thì

$$card(E) = \frac{\sum_{v \in V} deg(v)}{2}.$$

**Nhận xét 3.** Cho  $n$  là số nguyên dương lớn hơn 1, khi đó  $n$  có sự phân tích tiêu chuẩn thành tích các thừa số nguyên tố là  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  với  $p_1, p_2, \dots, p_k$  là các số nguyên tố đôi một phân biệt và  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  là các số nguyên dương (và  $k$  cũng là số nguyên dương). Xét  $\mathbb{Z}_n$  là vành các lớp thặng dư môđulô  $n$ , khi đó:

$$Nil(R) = \{\overline{ip_1 p_2 \dots p_k}\},$$

với  $i = 0, 1, \dots, p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_k^{\alpha_k-1} - 1$ .

Kết quả đầu tiên chúng tôi đưa ra công thức tính số đỉnh của đồ thị lũy linh của vành các lớp thặng dư môđulô  $n$  với  $n > 1$  là số nguyên dương bất kỳ.

**Mệnh đề 1.** Cho số nguyên dương  $n$  lớn hơn 1 có sự biểu diễn dưới dạng  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  trong đó  $p_1, p_2, \dots, p_k$  là các số nguyên tố phân biệt và  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  là các số nguyên dương (với  $k$  là số nguyên dương). Gọi  $G = G(V, E)$  là đồ thị lũy linh của vành  $R = \mathbb{Z}_n$ . Khi đó:

$$card(V) = (p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_k^{\alpha_k-1})(p_1 p_2 \dots p_k - 1).$$

*Chứng minh.* Chúng ta có:

$$Nil(R) = \{\overline{ip_1 p_2 \dots p_k}\},$$

với  $i = 0, 1, \dots, p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_k^{\alpha_k-1} - 1$ , suy ra,

$$card(Nil(R)) = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_k^{\alpha_k-1}.$$

Do đó:

$$card(V) = n - card(Nil(R)) = (p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_k^{\alpha_k-1})(p_1 p_2 \dots p_k - 1). \quad \square$$

Một câu hỏi thú vị được đặt ra nếu  $n = 2^t$  với  $t$  là số nguyên dương và  $G = G(V, E)$  là đồ thị lũy linh của vành  $R = \mathbb{Z}_n$ , khi đó  $G$  có đặc điểm gì? Từ việc quan sát các ví dụ cụ thể chúng ta có kết quả sau:

**Mệnh đề 2.** Cho vành  $R = \mathbb{Z}_{2^t}$  với  $t$  là số nguyên dương và  $G = G(V, E)$  là đồ thị lũy linh của vành  $R$ . Khi đó  $G$  là đồ thị đầy đủ.

*Chứng minh.* Giả sử  $n = 2^t$ , chúng ta sẽ chứng minh  $G$  là đồ thị đầy đủ. Trong trường hợp  $t = 1$  vành  $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ , suy ra  $V = \{\overline{1}\}$  và không có cạnh nào. Đồ thị này là đồ thị đầy đủ.

Với  $t = 2$ , đồ thị này  $G$  gồm hai đỉnh và một cạnh nên cũng là đồ thị đầy đủ. Cuối cùng xét  $t \geq 3$ , chúng ta có:

$$Nil(\mathbb{Z}_{2^t}) = \{\overline{2i} \mid i = 0, 1, \dots, 2^{t-1} - 1\}.$$

Suy ra  $V = \{\overline{1}, \overline{3}, \dots, \overline{2^t - 1}\}$ . Xét hai đỉnh bất kỳ phân biệt  $\overline{x}$  và  $\overline{y}$  của  $V$ . Vì các số nguyên dương  $x, y$  là số lẻ nên  $x + y$  là số chẵn. Do đó với  $\overline{x} + \overline{y} = \overline{z}$ , chúng ta có  $z$  là số nguyên dương chẵn, tức là  $\overline{z} \in Nil(\mathbb{Z}_{2^t})$ . Điều này suy ra đỉnh  $\overline{x}$  được nối với đỉnh  $\overline{y}$ . Vậy  $G$  là đồ thị đầy đủ.  $\square$

Trong trường hợp này, số cạnh của đồ thị lũy linh là:

**Hệ quả 3.** Cho vành  $R = \mathbb{Z}_{2^t}$  với  $t$  là số nguyên dương và  $G = G(V, E)$  là đồ thị lũy linh của vành  $R$ . Khi đó:

$$card(E) = \binom{2^{t-1}}{2}.$$

*Chứng minh.* Theo Mệnh đề 1,

$$card(V) = 2^{t-1}.$$

Mặt khác, theo Mệnh đề 2,  $G$  là đồ thị đầy đủ nên chúng ta có:

$$card(E) = \binom{2^{t-1}}{2}. \quad \square$$

Từ những quan sát trên đồ thị lũy linh của các vành  $\mathbb{Z}_{3^t}$  với  $t = 1, 2, 3$  chúng tôi thấy  $G$  là đồ thị liên thông. Tổng quát hơn, chúng ta có:

**Mệnh đề 4.** Cho vành  $R = \mathbb{Z}_{3^t}$  với  $t$  là số nguyên dương và  $G = G(V, E)$  là đồ thị lũy linh của vành  $R$ . Khi đó  $G$  là đồ thị liên thông.

*Chứng minh.* Giả sử  $n = 3^t$ , chúng ta sẽ chứng minh  $G$  là đồ thị liên thông. Trong trường hợp  $t = 1$  vành  $\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ , suy ra  $V = \{\overline{1}, \overline{2}\}$  và có đúng một cạnh nối  $\overline{1}$  với  $\overline{2}$ . Do đó đồ thị này là đồ thị liên thông. Với  $t \geq 2$ , chúng ta có:

$$Nil(\mathbb{Z}_{3^t}) = \{\overline{3i} \mid i = 0, 1, \dots, 3^{t-1} - 1\}.$$

Do đó  $V = \{\overline{3i + 1}, \overline{3i + 2} \mid i = 0, 1, \dots, 3^{t-1} - 1\}$ . Nhận xét rằng với mọi  $i, j \in \{1, 2, \dots, 3^{t-1} - 1\}$  chúng ta có

$$\overline{3i + 1} + \overline{3j + 2} \in Nil(3^t),$$

suy ra đỉnh  $\overline{3i + 1}$  luôn được nối với đỉnh  $\overline{3j + 2}$ . Từ đó chúng ta có chu trình  $e = \overline{1} \overline{2} \overline{4} \dots \overline{3i - 1} \overline{3i + 1} \overline{3i + 2} \dots \overline{3^t - 4} \overline{3^t - 2} \overline{3^t - 1} \overline{1}$  đi qua tất các đỉnh của  $G$ . Do đó với hai đỉnh bất kỳ  $\overline{x}, \overline{y} \in V$  và  $\overline{x} \neq \overline{y}$  luôn tồn tại đường đi từ  $\overline{x}$  đến  $\overline{y}$  là một phần của chu trình  $e$ .  $\square$

Hệ quả sau là cách tính số cạnh của đồ thị lũy linh của vành  $R = \mathbb{Z}_{3^t}$ .

**Hệ quả 5.** Cho vành  $R = \mathbb{Z}_{3^t}$  với  $t$  là số nguyên dương và  $G = G(V, E)$  là đồ thị lũy linh của vành  $R$ . Khi đó

$$card(E) = 3^{2t-2}.$$



*Chứng minh.* Công thức đúng với  $t = 1$  (khi đó  $\text{card}(E) = 1$ ). Với  $t \geq 2$ , xét các tập hợp  $V_1 = \{\overline{i.3+1} : i = 0, 1, \dots, 3^{t-1} - 1\}$  và  $V_2 = \{\overline{i.3+2} : i = 0, 1, \dots, 3^{t-1} - 1\}$ , suy ra  $V = V_1 \cup V_2$  và  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Xét hai đỉnh  $\overline{i.3+1}$  và  $\overline{i'.3+1}$  của  $V_1$  chúng ta có:

$$\overline{i.3+1} + \overline{i'.3+1} \notin \text{Nil}(\mathbb{Z}_{3^t}),$$

suy ra các đỉnh trong  $V_1$  không được nối với nhau. Hoàn toàn tương tự các đỉnh trong  $V_2$  cũng không được nối với nhau. Mặt khác xét hai đỉnh  $\overline{i.3+1} \in V_1$  và  $\overline{i'.3+2} \in V_2$  chúng ta có:

$$\overline{i.3+1} + \overline{i'.3+2} \in \text{Nil}(\mathbb{Z}_{3^t}),$$

suy ra một đỉnh bất kỳ trong  $V_1$  sẽ được nối với tất cả các đỉnh trong  $V_2$  và ngược lại một đỉnh bất kỳ trong  $V_2$  sẽ được nối với tất cả các đỉnh trong  $V_1$ . Do đó:

$$\text{card}(E) = \text{card}(V_1) \cdot \text{card}(V_2) = 3^{t-1} \cdot 3^{t-1} = 3^{2t-2}. \quad \square$$

Một câu hỏi đặt ra đồ thị lũy linh  $G$  có bao nhiêu thành phần liên thông? Cụ thể hơn, nếu  $G$  là đồ thị lũy linh của vành  $R = \mathbb{Z}_n$  thì chỉ số  $n$  liên hệ như thế nào với số thành phần liên thông của  $G$ . Bỏ đề dưới đây sẽ đưa ra công thức liên hệ cho một trường hợp đặc biệt của số nguyên dương  $n$  (với  $n$  không có ước chính phương).

**Bổ đề 6.** Cho số nguyên dương  $n$  lớn hơn 1 có sự biểu diễn dưới dạng  $n = p_1 p_2 \dots p_k$  trong đó  $p_1, p_2, \dots, p_k$  là các số nguyên tố phân biệt sao cho  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  (với  $k$  là số nguyên dương). Gọi  $G = G(V, E)$  là đồ thị lũy linh của vành  $R = \mathbb{Z}_n$ . Gọi  $C$  là số thành phần liên thông của  $G$ , khi đó:

$$C = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 2; \\ p_2 p_3 \dots p_k & \text{nếu } p_1 = 2 \text{ và } k \geq 2; \\ \frac{n-1}{2} & \text{nếu } p_1 > 2. \end{cases}$$

*Chứng minh.* Chúng ta có  $\text{Nil}(\mathbb{Z}_n) = \overline{0}$ , suy ra,

$$V = \{\overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

Tính toán là tầm thường với  $n = 2$ . Chúng ta kiểm tra với  $n > 2$ . Nhận xét rằng với mọi  $\overline{x} \in V$  tồn tại duy nhất phần tử  $\overline{y} = \overline{n-x} \in V$  sao cho  $\overline{x} + \overline{y} = \overline{0}$ . Do đó các đỉnh của  $G$  có bậc 0 hoặc 1 (đỉnh  $\overline{x}$  có bậc 0 nếu  $\overline{x} = \overline{n-x}$ ).

Nếu  $n = 2p_2 p_3 \dots p_k$  (với  $k \geq 2$  vì  $n > 2$ ), các thành phần liên thông của  $G$  là  $\{\overline{1}, \overline{2p_2 \dots p_k - 1}\}$ ,  $\{\overline{2}, \overline{2p_2 \dots p_k - 2}\}$ , ...,  $\{p_2 p_3 \dots p_k - 1, p_2 p_3 \dots p_k + 1\}$  và  $\{p_2 p_3 \dots p_k\}$ . Do đó số thành phần liên thông của  $G$  là:  $C = p_2 p_3 \dots p_k$ .

Nếu  $n = p_1 p_2 \dots p_k$  với  $p_1 > 2$  thì  $n-1$  là số chẵn và  $\overline{x} \neq \overline{n-x}$ . Từ đó tất cả các đỉnh của  $G$  đều có bậc 1 và số thành phần liên thông của  $G$  là  $C = \frac{n-1}{2}$ .

Hệ quả sau đưa ra công thức tính số cạnh của đồ thị  $G$  trong trường hợp  $n$  không có ước chính phương.

**Hệ quả 7.** Cho số nguyên dương  $n$  lớn hơn 1 có sự biểu diễn dưới dạng  $n = p_1 p_2 \dots p_k$  trong đó  $p_1, p_2, \dots, p_k$  là các số nguyên tố phân biệt sao cho  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  (với  $k$  là số nguyên dương). Gọi  $G = G(V, E)$  là đồ thị lũy linh của vành  $R = \mathbb{Z}_n$ . Khi đó

$$\text{card}(E) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n = 2; \\ p_2 p_3 \dots p_k - 1 & \text{nếu } p_1 = 2 \text{ và } k \geq 2; \\ \frac{n-1}{2} & \text{nếu } p_1 > 2. \end{cases}$$

*Chứng minh.*

Tính toán là tầm thường với  $n = 2$ .

Nếu  $n = 2p_2 p_3 \dots p_k$  với  $k \geq 2$ , các thành phần liên thông của  $G$  là:

$$G_1 = \{\overline{1}, \overline{2p_2 \dots p_k - 1}\}, G_2 = \{\overline{2}, \overline{2p_2 \dots p_k - 2}\}, \dots,$$

$G_{p_2 p_3 \dots p_{k-1}} = \{\overline{p_2 p_3 \dots p_k - 1}, \overline{p_2 p_3 \dots p_k + 1}\}$  và  $G_{p_2 p_3 \dots p_k} = \{\overline{p_2 p_3 \dots p_k}\}$ . Trong đó các thành phần liên thông của  $G_1, \dots, G_{p_2 p_3 \dots p_{k-1}}$  có đúng một cạnh và thành phần liên thông  $G_{p_2 p_3 \dots p_k}$  chỉ có một đỉnh và không có cạnh nào. Từ đó:

$$\text{card}(E) = p_2 p_3 \dots p_k - 1.$$

Nếu  $n = p_1 p_2 \dots p_k$  với  $p_1 > 2$  thì  $n - 1$  là số chẵn và tất cả các đỉnh của  $G$  đều có bậc 1 và suy ra,

$$\text{card}(E) = \frac{n-1}{2}. \quad \square$$

Định lý sau đây đưa ra công thức tính số thành phần liên thông của đồ thị lũy linh  $G$  của vành  $R = \mathbb{Z}_n$  với  $n > 1$  là số nguyên dương bất kỳ.

**Định lý 8.** Cho số nguyên dương  $n$  lớn hơn 1 có sự biểu diễn dưới dạng  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  trong đó  $p_1, p_2, \dots, p_k$  là các số nguyên tố phân biệt sao cho  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  và  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  là các số nguyên dương (với  $k$  là số nguyên dương). Gọi  $G = G(V, E)$  là đồ thị lũy linh của vành  $R = \mathbb{Z}_n$ . Gọi  $C$  là số thành phần liên thông của  $G$ , khi đó:

$$C = \begin{cases} 1 & \text{nếu } p_1 = 2 \text{ và } k = 1; \\ p_2 p_3 \dots p_k & \text{nếu } p_1 = 2 \text{ và } k \geq 2; \\ \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} & \text{nếu } p_1 > 2. \end{cases}$$

Hơn nữa, với  $p_1 = 2$  và tồn tại ít nhất  $\alpha_j > 1$  với  $j \in \{1, \dots, k\}$  nào đó luôn có đúng một thành phần liên thông là đồ thị con đầy đủ không tầm thường (tức là số đỉnh của đồ thị đầy đủ này lớn hơn 1).

*Chứng minh.*

**Bước 1.** Nếu  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 1$ , theo Bổ đề 6, chúng ta có:

$$C = \begin{cases} 1 & \text{nếu } p_1 = 2 \text{ và } k = 1; \\ p_2 \dots p_k & \text{nếu } p_1 = 2 \text{ và } k \geq 2; \\ \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} & \text{nếu } p_1 > 2. \end{cases}$$

**Bước 2.** Nếu tồn tại  $\alpha_j > 1$  với  $j \in \{1, \dots, k\}$  nào đó. Chúng ta có:

$$Nil(R) = \{\overline{ip_1p_2\dots p_k}\},$$

với  $i = 0, 1, \dots, p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\dots p_k^{\alpha_k-1} - 1$ .

Trường hợp 1. Nếu  $p_1 > 2$ , khi đó  $n$  là số nguyên dương lẻ. Xét các tập hợp:

$$V_1 = \{\overline{ip_1p_2\dots p_k + 1}, \overline{ip_1p_2\dots p_k + p_1p_2\dots p_k - 1}\},$$

với

$$i = 0, 1, \dots, p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\dots p_k^{\alpha_k-1} - 1;$$

$$V_2 = \{\overline{ip_1p_2\dots p_k + 2}, \overline{ip_1p_2\dots p_k + p_1p_2\dots p_k - 2}\},$$

với

$$i = 0, 1, \dots, p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\dots p_k^{\alpha_k-1} - 1;$$

.....;

$$V_{\frac{p_1p_2\dots p_k-1}{2}} = \{\overline{ip_1p_2\dots p_k + \frac{p_1p_2\dots p_k - 1}{2}}, \overline{ip_1p_2\dots p_k + \frac{p_1p_2\dots p_k + 1}{2}}\},$$

với

$$i = 0, 1, \dots, p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\dots p_k^{\alpha_k-1} - 1.$$

Chúng ta có:

$$V = \bigcup_{s=1}^{\frac{p_1p_2\dots p_k-1}{2}} V_s$$

và

$$V_s \cap V_t = \emptyset$$

với mọi  $s, t \in \{1, 2, \dots, \frac{p_1p_2\dots p_k-1}{2}\}$  và  $s \neq t$ .

Với một tập  $V_s$  bất kỳ chúng ta có:

$$\overline{ip_1p_2\dots p_k + s} + \overline{i'p_1p_2\dots p_k + p_1p_2\dots p_k - s} \in Nil(R),$$

trong đó,

$$i, i' \in \{0, 1, \dots, p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\dots p_k^{\alpha_k-1} - 1\};$$

suy ra hai điểm  $\overline{ip_1p_2\dots p_k + s}$  và  $\overline{i'p_1p_2\dots p_k + p_1p_2\dots p_k - s}$  được nối với nhau. Do đó  $e_s = \overline{ip_1p_2\dots p_k + s} \overline{p_1p_2\dots p_k - s} \overline{p_1p_2\dots p_k + s} \dots \overline{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k} - p_1p_2\dots p_k + s} \overline{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k} - s} \overline{s}$  là một chu trình đi qua tất cả các đỉnh của  $V_s$ .

Xét hai tập  $V_s$  và  $V_t$  bất kỳ sao cho  $s, t \in \{1, 2, \dots, \frac{p_1p_2\dots p_k-1}{2}\}$  và  $s \neq t$ , chúng ta có:

$$\overline{ip_1p_2\dots p_k + s} + \overline{i'p_1p_2\dots p_k + t} \notin Nil(R);$$

$$\overline{ip_1p_2\dots p_k + s} + \overline{i'p_1p_2\dots p_k + p_1p_2\dots p_k - t} \notin Nil(R);$$

$$\overline{ip_1p_2\dots p_k + p_1p_2\dots p_k - s} + \overline{i'p_1p_2\dots p_k + t} \notin Nil(R);$$

$$\overline{ip_1p_2\dots p_k + p_1p_2\dots p_k - s} + \overline{i'p_1p_2\dots p_k + p_1p_2\dots p_k - t} \notin Nil(R);$$

trong đó

$$i, i' \in \{0, 1, \dots, p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_k^{\alpha_k-1} - 1\}.$$

Điều này suy ra mỗi đỉnh của  $V_s$  không thể nối với bất kỳ đỉnh nào thuộc  $V_t$ . Từ đó đồ thị  $G$  được rã thành các đồ thị con  $G_1, G_2, \dots, G_{\frac{p_1p_2\dots p_k-1}{2}}$  với tập các đỉnh lần lượt là  $V_1, V_2, \dots, V_{\frac{p_1p_2\dots p_k-1}{2}}$  và tập các cạnh trong  $V_s$  được nối giữa các đỉnh dạng  $\overline{ip_1p_2\dots p_k + s}$  và  $\overline{i'p_1p_2\dots p_k + p_1p_2\dots p_k - s}$ . Mặt khác các đỉnh của  $V_s$  đều thuộc chu trình  $e_s$ , suy ra  $G_s$  là đồ thị con liên thông tối đại của  $G$ . Điều này có nghĩa là  $G_s$  là một thành phần liên thông của  $G$ . Vậy số thành phần liên thông trong trường hợp này là:

$$C = \frac{p_1p_2\dots p_k - 1}{2}.$$

*Trường hợp 2.* Nếu  $p_1 = 2$ , khi đó  $n$  là số nguyên dương chẵn. Nếu  $n = 2^{\alpha_1}$ , theo Mệnh đề 2, chúng ta có  $C = 1$ . Hơn nữa  $G$  là đồ thị đầy đủ. Với  $k \geq 2$ , xét các tập hợp:

$$V_1 = \{\overline{i2p_2\dots p_k + 1}, \overline{i2p_2\dots p_k + 2p_2\dots p_k - 1}\},$$

với

$$i = 0, 1, \dots, 2^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_k^{\alpha_k-1} - 1;$$

$$V_2 = \{\overline{i2p_2\dots p_k + 2}, \overline{i2p_2\dots p_k + 2p_2\dots p_k - 2}\},$$

với

$$i = 0, 1, \dots, 2^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_k^{\alpha_k-1} - 1;$$

.....;

$$V_{p_2\dots p_k-1} = \{\overline{i2p_2\dots p_k + p_2\dots p_k - 1}, \overline{i2p_2\dots p_k + p_2\dots p_k + 1}\},$$

với

$$i = 0, 1, \dots, 2^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_k^{\alpha_k-1} - 1;$$

$$V_{p_2\dots p_k} = \{\overline{i2p_2\dots p_k + p_2\dots p_k}\},$$

với

$$i = 0, 1, \dots, 2^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_k^{\alpha_k-1} - 1.$$

Chúng ta có:

$$V = \bigcup_{s=1}^{p_2\dots p_k} V_s$$

và

$$V_s \cap V_t = \emptyset$$

với mọi  $s, t \in \{1, 2, \dots, p_2\dots p_k\}$  và  $s \neq t$ .

Lý luận tương tự trường hợp 1, đồ thị  $G$  được tách thành các thành phần liên thông  $G_1, G_2, \dots, G_{p_2 \dots p_k}$  với tập đỉnh lần lượt là  $V_1, V_2, \dots, V_{p_2 \dots p_k}$ . Điều này suy ra số thành phần liên thông của đồ thị  $G$  trong trường hợp này là:

$$\mathcal{C} = p_2 \dots p_k.$$

Hơn nữa, trong trường hợp này thành phần liên thông  $G_{p_2 \dots p_k}$  với tập đỉnh  $V_{p_2 \dots p_k}$  là đồ thị đầy đủ. Thật vậy, với hai đỉnh bất kỳ trong  $V_{p_2 \dots p_k}$  chúng ta có:

$$\overline{i2p_2 \dots p_k + p_2 \dots p_k} + \overline{i'2p_2 \dots p_k + p_2 \dots p_k} \in Nil(R)$$

trong đó

$$i, i' \in \{0, 1, \dots, p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_k^{\alpha_k-1} - 1\}; i \neq i'.$$

Điều này suy ra hai đỉnh phân biệt bất kỳ trong  $V_{p_2 \dots p_k}$  đều được nối với nhau. Do đó  $G_{p_2 \dots p_k}$  là đồ thị đầy đủ.

Ngoài ra các thành phần liên thông  $G_1, G_2, \dots, G_{p_2 \dots p_k-1}$  đều không là đồ thị đầy đủ. Thật vậy, xét thành phần liên thông  $G_s$  với tập đỉnh  $V_s$  trong đó  $s \in \{1, \dots, p_2 \dots p_k - 1\}$  chúng ta có hai đỉnh

$$\bar{s} + \overline{2p_2 \dots p_k + s} \notin Nil(R).$$

Điều này dẫn đến hai đỉnh  $\bar{s}$  và  $\overline{2p_2 \dots p_k + s}$  không được nối với nhau trong  $G_s$ , suy ra  $G_s$  không là đồ thị đầy đủ. Vậy trong trường hợp này luôn có đúng một thành phần liên thông là đồ thị con đầy đủ.  $\square$

Từ Định lý 8, chúng tôi đưa ra công thức tính số cạnh của đồ thị lũy linh  $G$  của vành  $R = \mathbb{Z}_n$  với  $n > 1$  là số nguyên dương bất kỳ. Như vậy cùng với Mệnh đề 1, Hệ quả 9 đã cho ta công thức tính số đỉnh và số cạnh của đồ thị lũy linh của vành các lớp thặng dư môđulô  $n$  với  $n > 1$  là số nguyên dương bất kỳ.

**Hệ quả 9.** Cho số nguyên dương  $n$  lớn hơn 1 có sự biểu diễn dưới dạng  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  trong đó  $p_1, p_2, \dots, p_k$  là các số nguyên tố phân biệt sao cho  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  và  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  là các số nguyên dương (với  $k$  là số nguyên dương). Gọi  $G = G(V, E)$  là đồ thị lũy linh của vành  $R = \mathbb{Z}_n$ . Khi đó:

$$card(E) = \begin{cases} \binom{2^{\alpha_1-1}}{2} & \text{nếu } n = 2^{\alpha_1}; \\ (2^{2\alpha_1-2} p_2^{2\alpha_2-2} \dots p_k^{2\alpha_k-2})(p_2 p_3 \dots p_k - 1) + \binom{2^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_k^{\alpha_k-1}}{2} & \text{nếu } p_1 = 2, k \geq 2; \\ \frac{(p_1^{2\alpha_1-2} p_2^{2\alpha_2-2} \dots p_k^{2\alpha_k-2})(p_1 p_2 \dots p_k - 1)}{2} & \text{nếu } p_1 > 2. \end{cases}$$

*Chứng minh.* Gọi  $\mathcal{C}$  là số thành phần liên thông của  $G$ , chúng ta xét hai trường hợp sau:

**Trường hợp 1.** Nếu  $p_1 > 2$ , khi đó  $n$  là số nguyên dương lẻ và  $\mathcal{C} = \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2}$ . Gọi  $G_1, G_2, \dots, G_{\frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2}}$  là các thành phần liên thông của  $G$  với tập các đỉnh  $V_1, \dots, V_{\frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2}}$

xác định như trong chứng minh Định lý 8. Xét tập đỉnh  $V_s$  của thành phần liên thông  $G_s$  (với  $s = 1, \dots, \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2}$ ) chúng ta có:

$$V_s = \{\overline{ip_1 p_2 \dots p_k + s}, \overline{ip_1 p_2 \dots p_k + p_1 p_2 \dots p_k - s}\},$$

với

$$i = 0, 1, \dots, p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1} - 1.$$

Nhận xét rằng:

$$\overline{ip_1 p_2 \dots p_k + s} + \overline{i' p_1 p_2 \dots p_k + p_1 p_2 \dots p_k - s} \in Nil(R),$$

$$\overline{ip_1 p_2 \dots p_k + s} + \overline{i' p_1 p_2 \dots p_k + s} \notin Nil(R),$$

$$\overline{ip_1 p_2 \dots p_k + p_1 p_2 \dots p_k - s} + \overline{i' p_1 p_2 \dots p_k + p_1 p_2 \dots p_k - s} \notin Nil(R),$$

trong đó

$$i, i' \in \{0, 1, \dots, p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1} - 1\}.$$

Điều này dẫn đến bậc của một phần tử bất kỳ trong  $V_s$  là  $p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1}$ . Do đó:

$$card(E_s) = p_1^{2\alpha_1 - 2} p_2^{2\alpha_2 - 2} \dots p_k^{2\alpha_k - 2}$$

với  $G_s = G_s(V_s, E_s)$ ,  $E_s$  là tập các cạnh của thành phần liên thông  $G_s$ .

Mặt khác các thành phần liên thông  $G_1, G_2, \dots, G_{\frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2}}$  đều có số đỉnh và số cạnh bằng nhau. Chúng ta có

$$card(E) = \sum_{s=1}^{\frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2}} card(E_s) = \frac{(p_1^{2\alpha_1 - 2} p_2^{2\alpha_2 - 2} \dots p_k^{2\alpha_k - 2})(p_1 p_2 \dots p_k - 1)}{2}.$$

**Trường hợp 2.** Nếu  $p_1 = 2$ , khi đó  $n$  là số nguyên dương chẵn. Nếu  $n = 2^{\alpha_1}$  thì  $\mathcal{C} = 1$  và theo Hệ quả 3, chúng ta có

$$card(E) = \binom{2^{\alpha_1 - 1}}{2}.$$

Với  $k \geq 2$ , suy ra  $\mathcal{C} = p_2 \dots p_k$ . Lý luận tương tự và theo chứng minh Định lý 8, chúng ta có  $p_2 \dots p_k - 1$  thành phần liên thông  $G_s$  ứng với tập các đỉnh  $V_s$  với  $s = 1, \dots, p_2 \dots p_k - 1$  xác định bởi:

$$V_1 = \{\overline{i2p_2 \dots p_k + s}, \overline{i2p_2 \dots p_k + 2p_2 \dots p_k - s}\},$$

với

$$i = 0, 1, \dots, 2^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1} - 1.$$

Gọi  $E_s$  là tập các cạnh của  $G_s$ , tương tự trường hợp 1, suy ra,

$$card(E_s) = 2^{2\alpha_1 - 2} p_2^{2\alpha_2 - 2} \dots p_k^{2\alpha_k - 2}.$$

Thành phần liên thông  $G_{p_2 \dots p_k}$  với tập đỉnh  $V_{p_2 \dots p_k}$  xác định bởi:

$$V_{p_2 \dots p_k} = \{i2^{p_2 \dots p_k} + p_2 \dots p_k\},$$

với

$$i = 0, 1, \dots, 2^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1} - 1;$$

là đồ thị đầy đủ. Do đó gọi tập các cạnh của  $G_{p_2 \dots p_k}$  là  $E_{p_2 \dots p_k}$  chúng ta có:

$$\text{card}(E_{p_2 \dots p_k}) = \binom{2^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1}}{2}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} \text{card}(E) &= \sum_{s=1}^{p_2 \dots p_k - 1} \text{card}(E_s) + \text{card}(E_{p_2 \dots p_k}) = \\ &= (2^{2\alpha_1 - 2} p_2^{2\alpha_2 - 2} \dots p_k^{2\alpha_k - 2})(p_2 p_3 \dots p_k - 1) + \binom{2^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1}}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Theo các Mệnh đề 2 và Mệnh đề 3, nếu  $R = \mathbb{Z}_{2^t}$  hoặc  $R = \mathbb{Z}_{3^t}$  thì đồ thị lũy linh của  $R$  là liên thông (lưu ý rằng đồ thị đầy đủ cũng là đồ thị liên thông). Tuy nhiên liệu có lớp các số nguyên dương  $n > 1$  nào khác để  $G$  vẫn là đồ thị liên thông hay không? Định lý sau đây khẳng định rằng chỉ có  $n = 2^t$  và  $n = 3^t$  mà thôi.

**Định lý 10.** Cho vành  $R = \mathbb{Z}_n$  với  $n$  là số nguyên dương lớn hơn 1 và  $G = G(V, E)$  là đồ thị lũy linh của vành  $R$ . Khi đó các khẳng định sau là tương đương:

- (i)  $G(V, E)$  là đồ thị liên thông;
- (ii)  $n = 2^t$  hoặc  $n = 3^t$  với  $t$  là số nguyên dương.

*Chứng minh.*

(i)  $\implies$  (ii). Giả sử  $G(V, E)$  là đồ thị liên thông, chúng ta sẽ chứng minh  $n = 2^t$  hoặc  $3^t$  với  $t$  là số nguyên dương. Đặt  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  trong đó  $p_1, p_2, \dots, p_k$  là các số nguyên tố phân biệt sao cho  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  và  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  là các số nguyên dương (với  $k$  là số nguyên dương). Khi đó theo Định lý 8, số thành phần liên thông  $\mathcal{C}$  của đồ thị  $G$  là:

$$\mathcal{C} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 2^{\alpha_1}; \\ p_2 p_3 \dots p_k & \text{nếu } p_1 = 2 \text{ và } k \geq 2; \\ \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} & \text{nếu } p_1 > 2. \end{cases}$$

Vì  $G$  là đồ thị liên thông nên  $\mathcal{C} = 1$ . Nếu  $p_1 = 2$  và  $k \geq 2$  thì số thành phần liên thông là  $p_2 p_3 \dots p_k \geq 3 > 1$ , điều này mâu thuẫn với tính chất về số thành phần liên thông của  $G$ . Do đó  $n = 2^{\alpha_1}$ .

Nếu  $p_1 > 2$ , giả sử  $p_1 \geq 5$  thì số thành phần liên thông của  $G$  là:

$$\frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} \geq 2.$$

Điều này mâu thuẫn với tính chất  $\mathcal{C} = 1$ . Do đó  $p_1 = 3$  và chúng ta giả sử  $k > 1$  (tức là tồn tại  $p_2 \geq 5$ ), khi đó số thành phần liên thông của  $G$  là:

$$\frac{3p_2 \dots p_k - 1}{2} \geq 7.$$

Điều này mâu thuẫn với tính chất về số thành phần liên thông của  $G$ . Do đó  $k = 1$  và  $n = 3^{\alpha_1}$ . Vậy  $n = 2^t$  hoặc  $n = 3^t$  (với  $t = \alpha_1$ ), tính chất (ii) được chứng minh.

(ii)  $\implies$  (i). Với  $n = 2^t$  hoặc  $n = 3^t$  (trong đó  $t$  là số nguyên dương). Theo Định lý 8, số thành phần liên thông  $\mathcal{C}$  của đồ thị  $G$  là:

$$\mathcal{C} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } p = 2; \\ \frac{3-1}{2} = 1 & \text{nếu } p = 3. \end{cases}$$

Điều này dẫn đến  $G$  là đồ thị liên thông. □

Định lý sau đây đưa ra điều kiện cần và đủ của  $n$  để đồ thị lũy linh của vành  $R = \mathbb{Z}_n$  là đồ thị đầy đủ.

**Định lý 11.** Cho vành  $R = \mathbb{Z}_n$  với  $n$  là số nguyên dương lớn hơn 1 và  $G = G(V, E)$  là đồ thị lũy linh của vành  $R$ . Khi đó các khẳng định sau là tương đương:

- (i)  $G(V, E)$  là đồ thị đầy đủ;
- (ii)  $n = 2^t$  với  $t$  là số nguyên dương hoặc  $n = 3$ .

*Chứng minh.*

(i)  $\implies$  (ii). Giả sử  $G(V, E)$  là đồ thị đầy đủ, chúng ta sẽ chứng minh  $n = 2^t$  (với  $t$  là số nguyên dương) hoặc  $n = 3$ . Giả sử  $n \neq 2^t$  và  $n \neq 3$ . Chúng ta xét sự phân tích tiêu chuẩn của số nguyên dương  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  trong đó  $p_1, p_2, \dots, p_k$  là các số nguyên tố phân biệt và  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  là các số nguyên dương (với  $k$  là số nguyên dương). Không mất tính chất tổng quát ta có giả sử  $2 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_k$ .

**Trường hợp 1.** Xét trường hợp  $k = 1$ , suy ra  $n = p_1^{\alpha_1}$ . Theo giả sử ta có  $p_1 \geq 3$ . Trước hết ta giả sử  $p_1 \geq 5$ , chúng ta có:

$$\text{Nil}(\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}}) = \{\overline{ip} \mid i = 0, 1, \dots, p^{\alpha_1-1} - 1\}.$$

Suy ra  $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3} \in V = \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \setminus \text{Nil}(\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}})$  và  $\overline{1} + \overline{2} = \overline{3}$ . Do đó đỉnh  $\overline{1}$  không nối với đỉnh  $\overline{2}$ , trái giả thiết  $G$  là đồ thị đầy đủ. Từ đó  $p_1 = 3$  và theo giả sử  $\alpha_1 \geq 2$ . Khi đó

$$\text{Nil}(\mathbb{Z}_{3^{\alpha_1}}) = \{\overline{3}, \overline{6}, \dots, \overline{3^{\alpha_1} - 3}\},$$

suy ra  $\overline{1}, \overline{4}, \overline{5} \in V$  và  $\overline{1} + \overline{4} = \overline{5}$ . Do đó đỉnh  $\overline{1}$  không nối với đỉnh  $\overline{4}$ , trái giả thiết  $G$  là đồ thị đầy đủ. Từ đó  $k > 1$ .

**Trường hợp 2.** Xét trường hợp  $k \geq 2$ , suy ra,

$$\text{Nil}(\mathbb{Z}_n) = \{\overline{ip_1 p_2 \dots p_k} \mid i = 0, 1, \dots, p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_k^{\alpha_k-1} - 1\}.$$

Vì  $p_1 p_2 \dots p_k \geq 6$  nên  $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3} \in V$  và  $\overline{1} + \overline{2} = \overline{3}$ . Do đó đỉnh  $\overline{1}$  không nối với đỉnh  $\overline{2}$ , trái giả thiết  $G$  đầy đủ. Vậy chỉ có thể xảy ra  $n = 2^t$  hoặc  $n = 3$ . Điều kiện (ii) được chứng minh.



(ii)  $\implies$  (i). Giả sử  $n = 2^t$  hoặc  $n = 3$ , chúng ta sẽ chứng minh  $G$  là đồ thị đầy đủ. Với  $n = 3$ , chúng ta có vành  $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$  đồ thị  $G$  gồm hai đỉnh  $\bar{1}$  và  $\bar{2}$  đồng thời hai đỉnh đó được nối với nhau bằng một cạnh, suy ra  $G$  là đồ thị đầy đủ. Với  $n = 2^t$  theo Mệnh đề 2,  $G$  là đồ thị đầy đủ. Điều kiện (i) được chứng minh.

Chúng tôi sẽ kết thúc bài viết này bằng câu hỏi mở dưới đây:

**Câu hỏi.** Mô tả các vành giao hoán mà đồ thị lũy linh của chúng là *đầy đủ* hay *liên thông*?

**Lời cảm ơn:** Bài báo này được hỗ trợ kinh phí bởi đề tài cấp Bộ Giáo dục và Đào tạo, Mã số: B2018-HHT-02.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] G. Abrams and G. Aranda Pino, "The Leavitt path algebra of a graph", *J. Algebra*, Vol. **293**, 319-334, 2005.
- [2] D. F. Anderson and P. Livingston, "The Zero-Divisor Graph of a commutative ring", *J. Algebra*, Vol. **217**, 434-447, 1999.
- [3] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
- [4] D. K. Basnet, A. Sharma and R. Dutta, Nilpotent graph, *Arxiv*: **1804.08937**, 8 page, 2018.
- [5] A. J. Diesl, "Nil clean rings", *J. Algebra*, Vol. **383**, 197-121, 2013.
- [6] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer - Verlag, New York, 1997.
- [7] G. Köthe, Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist, *Math. Zei.*, Vol. **32**, 161-186, 1930.
- [8] J. Matczuk, "Conjugate (nil) clean rings and Kothe's problem", *Journal of Algebra and Its Applications*, Vol. **16**, (14 page), 2017.
- [9] I. Reaburn, *Graph Algebras*, Volume 103 of CBMS Regional Conference Serial in Mathematics. Published for the Conference Board of the Mathematical Science, Washington DC, 2005.
- [10] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Reading, 1991.

## SUMMARY

### NILPOTENT GRAPHS OF THE RINGS $\mathbb{Z}_n$

In [4], Basnet-Sharma-Dutta introduced and studied the concept of the nilpotent graph of a finite commutative ring. In this paper, we calculate the number of connected components of the nilpotent graphs of the rings  $\mathbb{Z}_n$ . Applying this result, we characterize the connective properties and completeness of the nilpotent graphs of the rings  $\mathbb{Z}_n$ .

**Keyword:** Nilpotent element; graph; nilpotent graph; complete graph; connected graph; connected component.